Punto medio.

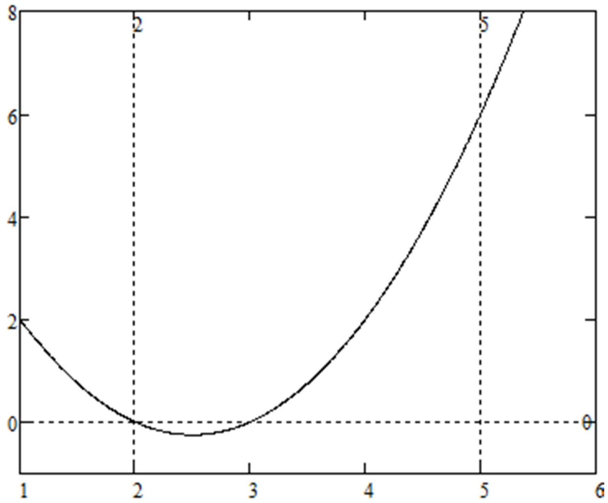
Mediante sumatoria Riemman determine el área bajo la curva de ecuación

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

En el intervalo $I[2,5]$ Utilice punto medio para el desarrollo

Solución.

Si graficamos la función $f(x)$ en el intervalo dado tendremos que



Se observa una sección donde el área será negativa por lo que trabajamos la sumatoria en dos partes.

$$I_1[2,3] \quad I_2[3,5]$$

Para la segunda parte, se tiene que la dimensión de la base será

$$\Delta x = \frac{5-3}{n} \quad => \quad \Delta x = \frac{2}{n}$$

Establecemos los puntos de cada rectángulo

$$x_0 = 3 \quad x_1 = 3 + \frac{2}{n} \quad x_2 = 3 + \frac{4}{n} \quad \ldots \quad x_i = 3 + \frac{2i}{n} \ldots \quad x_n = 3 + 2 = 5$$

Por lo que se tiene que punto derecho es de la forma $x_i = 3 + \frac{2i}{n}$ y el punto izquierdo es de la forma $x_{i-1} = 3 + \frac{2(i-1)}{n}$, el punto medio se define como

$$x_{i_m} = \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} \quad => \quad x_{i_m} = \frac{3 + \frac{2i}{n} + 3 + \frac{2(i-1)}{n}}{2} \quad => \quad x_{i_m} = \frac{\left(6 + \frac{4i}{n} - \frac{2}{n}\right)}{2}$$

$$x_{i_m} = \left(3 + \frac{2i}{n} - \frac{1}{n}\right) \quad => \quad x_{i_m} = \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right)$$

Por lo que:

$$A_{\Delta x} = \frac{2}{n} * f\left(x_{i_m}\right)$$

El área total

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(x_{i_m}^2 - 5x_{i_m} + 6\right)$$

El área real.

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right)^2 - 5\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right) + 6\right)$$

Desarrollamos

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2i}{n}\right) + \frac{4i^2}{n^2} - 5\left(3 - \frac{1}{n}\right) - 5\left(\frac{2i}{n}\right) + 6\right)$$

Considerando que la variable es la “i” y no n dentro de la sumatoria tendremos que

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(2\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2i}{n}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\frac{4i^2}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5\left(3 - \frac{1}{n}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{10}{n}\left(\frac{2i}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}6$$

Utilizando las formulaciones correspondientes a la variable i con su potencia tendremos que

$$A_R = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 n + \frac{8}{n^2}\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{10}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right)n - \frac{20}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{12}{n}n$$

Tomando el límite tendremos

$$A_R = 2(9) + 4(3) + \frac{8}{3} - 10(3) - 10 + 12 \quad => \quad \boldsymbol{A_R = \frac{14}{3}}$$

Ahora realice uds el otro intervalo. Y obtenga como respuesta total

$$\boldsymbol{A_{[2,5]} = \frac{29}{6}}$$